

# Incorporación de Circuitos Concentrados de Dos Puertas en Simuladores Electromagnéticos Temporales Basados en el Método FDTD

Oscar González, José A. Pereda y Ángel Vegas

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones (DCom), Universidad de Cantabria.

Correo electrónico: oscargr@dicom.unican.es, pereda@dicom.unican.es, vegasa@unican.es

**Abstract**— The Lumped-Element Finite Difference Time-Domain (LE-FDTD) method is an extension of the original FDTD method that allows circuitual lumped elements to be incorporated into FDTD simulators. The Lumped-Network (LN) FDTD technique is an improvement of the LE-FDTD method that permits linear one-port LN to be implemented in a systematic way and using only a single FDTD cell.

This paper presents an extension of the LN-FDTD method for the incorporation of linear two-port LN into the FDTD framework. The method basically consists of describing a two-port LN by means of its admittance matrix in the Laplace domain. By using appropriate digital signal-processing methodologies a set of difference equations that models the two-port LN behavior is derived. The new approach has been validated by comparison with the LN-FDTD method and with the circuitual simulator ADS®.

**Keywords**— FDTD methods, lumped networks, global modeling.

## I. INTRODUCCIÓN

EL método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (cuyas siglas en inglés son FDTD) se propuso originalmente como una técnica numérica de análisis electromagnético. Durante la última década, ha sido considerable el esfuerzo realizado para incorporar elementos circuitales concentrados en simuladores FDTD [1]-[3]. Inicialmente, se propusieron extensiones del método FDTD (denominadas genéricamente *Lumped-Element* (LE)-FDTD), que permitían incluir elementos pasivos simples, tales como resistencias, capacidades y autoinducciones, pero también dispositivos más complejos, como diodos y transistores. El método LE-FDTD ha permitido analizar de forma satisfactoria circuitos de microondas complejos que contengan tanto partes pasivas como activas, lineales como no lineales, tendiendo un puente entre los simuladores puramente electromagnéticos y los puramente circuitales.

Sin embargo, una de las limitaciones que presentaba el método LE-FDTD consistía en que la formulación de circuitos multi-elemento no resultaba sencilla ni sistemática. Esta limitación fue eliminada, para el caso de circuitos lineales de una puerta, mediante el conocido como método LN-FDTD (*Lumped-Network* FDTD) [4]. Otra limitación que presentan tanto el método LE-FDTD como el LN-FDTD, es la imposibilidad de definir un circuito concentrado que ocupe más de una celda de la malla FDTD.

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación del MEC a través del proyecto TIC2003-09677-C03-01.

En esta comunicación se presenta la extensión del método LN-FDTD al caso de circuitos lineales concentrados de dos puertas. En lo que sigue, nos referiremos a esta nueva técnica mediante las siglas TP-LN-FDTD (*Two-Port* LN-FDTD). Este método parte de una descripción del cuadripolo en términos de su matriz admitancia, expresada en el dominio de Laplace. Relacionando la tensiones y corrientes en las puertas con el campo eléctrico y la densidad de corriente, respectivamente, y empleando las mismas técnicas de discretización que en el método LN-FDTD, llegamos a un conjunto de ecuaciones en diferencias que describen el comportamiento del circuito concentrado. Las ecuaciones resultantes son consistentes con el método FDTD original, permitiendo la incorporación del circuito concentrado en simuladores FDTD.

Con el objeto de validar la nueva formulación, se ha considerado el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión de un diodo Schottky, en régimen lineal, colocado en serie entre dos líneas *microstrip*. Los resultados obtenidos con esta nueva formulación se han comparado con los calculados mediante el método LN-FDTD y mediante el simulador circuitual ADS®.

## II. FORMULACIÓN

Consideremos las ecuaciones de Maxwell del rotacional para medios isótropos, lineales y no dispersivos

$$\mu_0 \partial_t H_\alpha = -[\nabla \times \vec{E}]_\alpha, \quad (1a)$$

$$\epsilon \partial_t E_\alpha = [\nabla \times \vec{H}]_\alpha, \quad (1b)$$

donde  $\alpha = x, y, z$ . Según el esquema FDTD original, las 6 ecuaciones anteriores se expresan en forma discreta como

$$H_\alpha^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}_{H_\alpha}) = H_\alpha^{n-\frac{1}{2}}(\vec{r}_{H_\alpha}) - \frac{\Delta t}{\mu_0} [\nabla \times \vec{E}^n(\vec{r}_{H_\alpha})]_\alpha, \quad (2a)$$

$$E_\alpha^{n+1}(\vec{r}_{E_\alpha}) = E_\alpha^n(\vec{r}_{E_\alpha}) + \frac{\Delta t}{\epsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{r}_{E_\alpha})]_\alpha, \quad (2b)$$

donde  $\vec{r}_{E_\alpha}$  y  $\vec{r}_{H_\alpha}$  denotan, respectivamente, la posición espacial de  $E_\alpha$  y  $H_\alpha$  en la celda FDTD. Expresiones discretas explícitas para el rotacional pueden encontrarse, por ejemplo, en [5].

Con el objetivo de incorporar una red de dos puertas en el formalismo FDTD, seguimos la estrategia a continuación descrita.

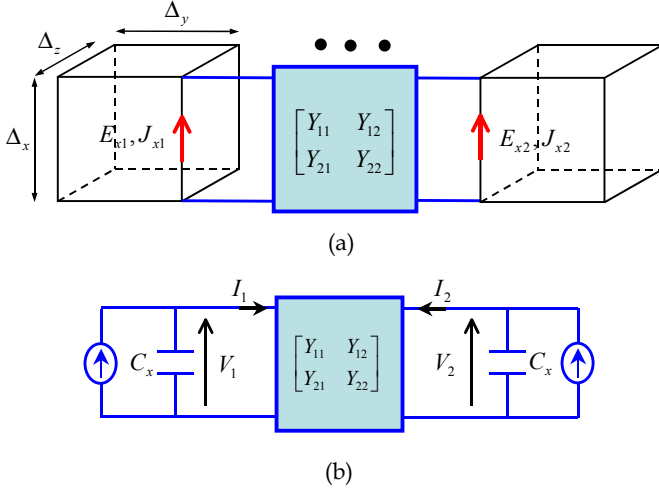


Fig. 1. (a) Cuadripolo conectado entre dos celdas unidad FDTD no consecutivas. (b) Circuito equivalente total

Comenzamos eligiendo dos nudos eléctricos de la malla FDTD. Por sencillez en la notación, tomaremos ambos nudos asociados con componentes  $E_x$  del campo ( $E_{x1}$  en la puerta 1 y  $E_{x2}$  en la puerta 2), como se muestra en la figura 1-a. Para tener en cuenta la presencia del cuadripolo, añadimos sendos términos de densidad de corriente a la ecuación de Ampère ( $J_{x1}$  en la puerta 1 y  $J_{x2}$  en la puerta 2), los cuales se discretizan mediante promediado temporal:

$$E_{x1}^{n+1} = E_{x1}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_{x1} - \frac{\Delta t}{2\epsilon} (J_{x1}^{n+1} + J_{x1}^n), \quad (3a)$$

$$E_{x2}^{n+1} = E_{x2}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon} [\nabla \times \vec{H}^{n+\frac{1}{2}}]_{x2} - \frac{\Delta t}{2\epsilon} (J_{x2}^{n+1} + J_{x2}^n). \quad (3b)$$

El cuadripolo se define en términos de su matriz admitancia expresada en el dominio de Laplace:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde  $I_p$  y  $V_p$  ( $p = 1, 2$ ) se muestran en la figura 1-b. Los elementos de la matriz admitancia se consideran funciones racionales de la frecuencia compleja  $s$ :

$$Y_{pq}(s) = \frac{N_{pq}(s)}{D_{pq}(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M_{pq}} a_m^{(p,q)} s^m}{\sum_{m=0}^{M_{pq}} b_m^{(p,q)} s^m}, \quad (5)$$

donde  $a_m^{(p,q)}$  y  $b_m^{(p,q)}$  son coeficientes reales y  $M_{pq}$  es el orden del modelo.

Introduciendo 4 corrientes auxiliares  $I_{pq}(s)$ , expresamos (4) como

$$I_p(s) = \sum_{q=1,2} I_{pq}(s), \quad p = 1, 2, \quad (6) \quad \text{y}$$

donde

$$I_{pq}(s) = Y_{pq}(s) V_q(s). \quad (7)$$

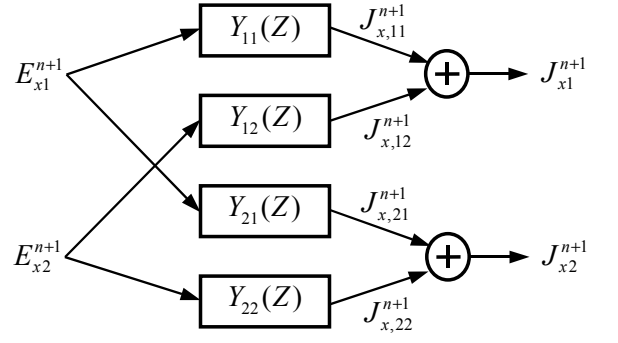


Fig. 2. Cálculo de  $J_{x1}^{n+1}$  y  $J_{x2}^{n+1}$  en función de  $E_{x1}^{n+1}$  y  $E_{x2}^{n+1}$ . Cada caja representa un filtro digital.

Nótese que (6) comprende 4 ecuaciones, una por cada variable auxiliar  $I_{pq}(s)$  ( $p, q = 1, 2$ ).

El objetivo ahora es obtener una descripción en diferencias de (6), en el dominio del tiempo discreto. Siguiendo las mismas ideas que en [4], iremos del dominio de Laplace al dominio del tiempo discreto pasando a través del dominio de la transformada  $Z$ .

En el dominio de la transformada  $Z$ , (6) se escribe simplemente como

$$I_p(Z) = \sum_{q=1,2} I_{pq}(Z), \quad p = 1, 2, \quad (8)$$

donde

$$I_{pq}(Z) = Y_{pq}(Z) V_q(Z), \quad (9)$$

con

$$Y_{pq}(Z) = \frac{\sum_{m=0}^{M_{pq}} c_m^{(p,q)} Z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M_{pq}} d_m^{(p,q)} Z^{-m}}. \quad (10)$$

En este trabajo, las funciones  $Y_{pq}(Z)$  se obtienen mediante la aplicación de la transformación de Moebius, dada por

$$s = \frac{2}{\Delta_t} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}, \quad (11)$$

a las correspondientes funciones  $Y_{pq}(s)$  definidas en (5). Esta transformación preserva el orden del modelo  $M_{pq}$ . Los coeficientes  $c_m^{(p,q)}$  y  $d_m^{(p,q)}$  se pueden calcular a partir de los coeficientes  $a_m^{(p,q)}$  y  $b_m^{(p,q)}$  y del paso temporal  $\Delta_t$ .

Seguidamente, aplicando la propiedad de la transformada  $Z$ :  $Z^{-m} F(Z) \leftrightarrow F^{n-m}$ , las relaciones (8) y (9) se expresan en el dominio del tiempo discreto de la forma

$$I_p^{n+1} = \sum_{q=1,2} I_{pq}^{n+1}, \quad p = 1, 2, \quad (12)$$

$$I_{pq}^{n+1} + \sum_{m=1}^{M_{pq}} d_m^{(p,q)} I_{pq}^{n-m+1} = \sum_{m=0}^{M_{pq}} c_m^{(p,q)} V_q^{n-m+1}. \quad (13)$$

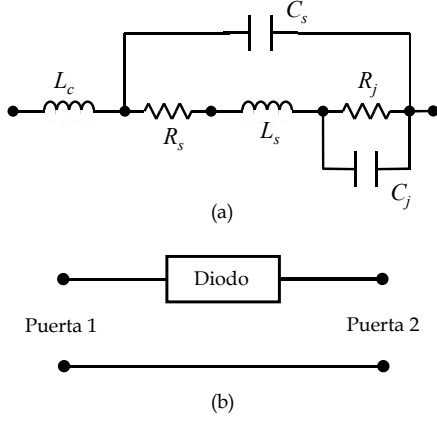


Fig. 3. (a) Circuito lineal equivalente del diodo Schottky HSMS-8101:  $L_c = 1 \text{ nH}$ ,  $R_s = 6 \text{ } \Omega$ ,  $L_s = 1.3 \text{ nH}$ ,  $C_s = 0.08 \text{ pF}$ ,  $R_j = 263 \text{ } \Omega$ ,  $C_j = 0.17 \text{ pF}$ . (b) Diodo visto como un circuito de dos puertas.

Relacionando, en cada puerta, el voltaje con el campo eléctrico y la corriente con la densidad de corriente

$$\begin{aligned} V_p^n &= \int E_{xp} dx \simeq E_{xp}^n \Delta x, \\ I_p^n &= \iint J_{xp} dy dz \simeq J_{xp}^n \Delta y \Delta z, \end{aligned}$$

donde  $p = 1, 2$ , se obtiene una versión de (12) y (13) en función de campos:

$$J_{xp}^{n+1} = \sum_{q=1,2} J_{x,pq}^{n+1}, \quad p = 1, 2, \quad (14)$$

con

$$J_{x,pq}^{n+1} + \sum_{m=1}^{M_{pq}} d_m^{(p,q)} J_{x,pq}^{n-m+1} = \sum_{m=0}^{M_{pq}} \bar{c}_m^{(p,q)} E_{xq}^{n-m+1}, \quad (15)$$

donde

$$\bar{c}_m^{(p,q)} = \frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z} c_m^{(p,q)}.$$

La expresión (15) representa una ecuación en diferencias de orden superior, la cual puede escribirse más eficientemente en forma de un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden. Para ello, empleamos una implementación típica de filtros digitales conocida como forma directa transpuesta de tipo II:

$$\begin{aligned} J_{x,pq}^{n+1} &= W_{pq,1}^n + \bar{c}_0^{(p,q)} E_{xq}^{n+1}, \\ W_{pq,m}^{n+1} &= W_{pq,m+1}^n - d_m^{(p,q)} J_{x,pq}^{n+1} + \bar{c}_m^{(p,q)} E_{xq}^{n+1}, \\ W_{pq,M_{pq}}^{n+1} &= \bar{c}_{M_{pq}}^{(p,q)} E_{xq}^{n+1} - d_{M_{pq}}^{(p,q)} J_{x,pq}^{n+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

con  $m = 1, 2, \dots, M_{pq} - 1$ . Además,  $W_{pq,m}^n$  ( $m = 1, \dots, M_{pq}$ ) son variables auxiliares y hemos tomado  $J_{x,pq}^{n+1}$  como variable de salida del filtro. En realidad, tenemos 4 filtros digitales, ya que  $p, q = 1, 2$ ; cada filtro implementa uno de los elementos de la matriz admitancia. En la figura 2 se muestra el esquema de cálculo para  $J_{x1}^{n+1}$  y  $J_{x2}^{n+1}$  a partir de  $E_{x1}^{n+1}$  y  $E_{x2}^{n+1}$ .

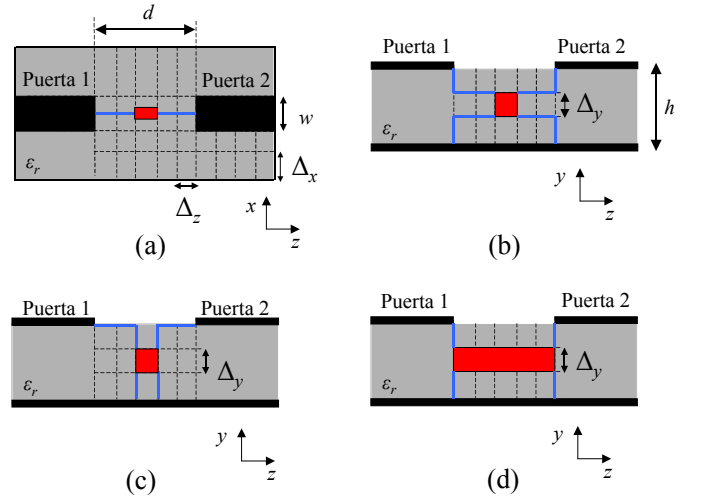


Fig. 4. (a) Estructura simulada. Rojo: circuito concentrado, azul: cableado de conexión. (b) Red de dos puertas definida en una celda con cableado interno (TP-LN-FDTD-Cable-Int). (c) Red de dos puertas definida en una celda con cableado externo (TP-LN-FDTD-Cable-Ext). (d) Red de dos puertas definida entre celdas no consecutivas (TP-LN-FDTD-NC).

Nótese que la primera ecuación de cada filtro digital está acoplada con la ecuación de Ampère (3). Afortunadamente, dichas ecuaciones pueden desacoplarse antes de ser implementadas; concretamente, eliminando  $J_{x1}^{n+1}$  y  $J_{x2}^{n+1}$  de (3) y usando (14), se obtiene

$$\begin{bmatrix} E_{x1}^{n+1} \\ E_{x2}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_0^{(1,1)} + \frac{2\epsilon}{\Delta t} & \bar{c}_0^{(1,2)} \\ \bar{c}_0^{(2,1)} & \bar{c}_0^{(2,2)} + \frac{2\epsilon}{\Delta t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_{x1}^n \\ T_{x2}^n \end{bmatrix}, \quad (17)$$

donde

$$T_{xp}^n = \frac{2\epsilon}{\Delta t} E_{xp}^n + 2[\nabla \times H^{n+\frac{1}{2}}]_{xp} - \sum_{q=1,2} (J_{x,pq}^n + W_{pq,1}^n).$$

La inversión de matrices que aparece en (17) se realiza en la etapa de preprocesado, por lo que la implementación de (17) es completamente explícita.

El algoritmo TP-LN-FDTD resultante requiere los siguientes pasos en cada iteración temporal:

- Primero, se calcula el campo magnético,  $\vec{H}^{n+\frac{1}{2}}$ , empleando la expresión FDTD convencional (2a).
- Segundo, se calcula el campo eléctrico en las puertas del cuadripolo,  $E_{xp}^{n+1}$ , utilizando (17).
- Tercero, se calculan las densidades de corriente  $J_{x,pq}^{n+1}$  y las variables auxiliares  $W_{pq,m}^{n+1}$  usando (16), donde  $E_{xq}^{n+1}$  es conocido del paso anterior.

Para los nudos eléctricos del dominio de cómputo no asociados a las puertas de ningún cuadripolo, los dos últimos pasos del algoritmo se sustituyen por la aplicación de (2b).

### III. VALIDACIÓN

Con el objeto de validar la formulación anteriormente expuesta, hemos considerado un diodo Schottky HSMS-8101 cuyo circuito lineal equivalente se muestra en la figura 3. Dicho diodo se ha colocado en serie entre dos líneas

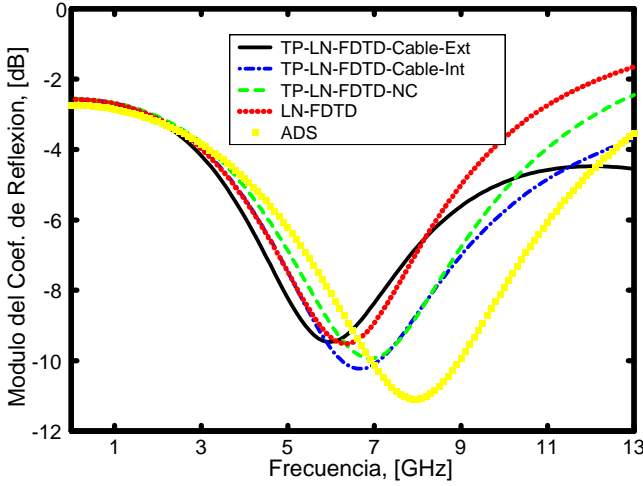


Fig. 5. Módulo del coeficiente de reflexión de un diodo Schottky colocado entre dos líneas *microstrip*. Los resultados obtenidos mediante TP-LN-FDTD según las tres estrategias definidas en la figura 4 y comparados con LN-FDTD y ADS®.

*microstrip* de  $50 \Omega$ , tal como se muestra en la figura 4-a. Las dimensiones físicas de las líneas son: altura  $h = 0.635$  mm y anchura  $w = h$ , la constante dieléctrica del sustrato vale  $\epsilon_r = 9.6$ , y la separación entre líneas (*gap*) es  $d = 1.27$  mm.

La simulación se ha realizado en la banda frecuencial  $[0 - 13]$  GHz, los tamaños de celda utilizados son  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.127$  mm, y el paso temporal  $\Delta_t = 0.2$  ps, que se corresponde con 0.99 veces el paso temporal máximo del método FDTD convencional. La estructura completa va encerrada en una caja de  $79 \times 43 \times 130$  celdas.

A la hora de incorporar el diodo en la estructura, se han considerado tres posibles formas de conectarlo a las líneas *microstrip*. En la primera, el diodo ocupa una celda y la parte horizontal del cableado es interior al sustrato, como se muestra en la figura 4-b. En la segunda, el diodo ocupa también una celda; sin embargo, ahora, la parte horizontal del cableado está en el mismo plano que las líneas *microstrip*, como se aprecia en la figura 4-c. La tercera forma de incorporar el diodo consiste en definir las puertas del cuadripolo en el plano terminal de las líneas, tal como aparece en la figura 4-d. En este caso, el diodo ocupa 10 celdas en horizontal, siendo sólo necesario emplear cableado vertical.

En las figuras 5 y 6 se muestran, respectivamente, los coeficientes de reflexión y de transmisión de la estructura anteriormente descrita. En cada figura pueden apreciarse cinco curvas; tres de ellas corresponden a los resultados obtenidos mediante el método TP-LN-FDTD para cada uno de los cableados discutidos en el párrafo anterior; también se han dibujado los resultados calculados mediante el método LN-FDTD [4] y los obtenidos empleando el simulador circuital ADS®.

Tomando la solución calculada mediante ADS® como referencia, se observa que de las tres formas de incorporar el diodo que se han considerado con el método TP-LN-FDTD, la que define el diodo sobre múltiples celdas (figura

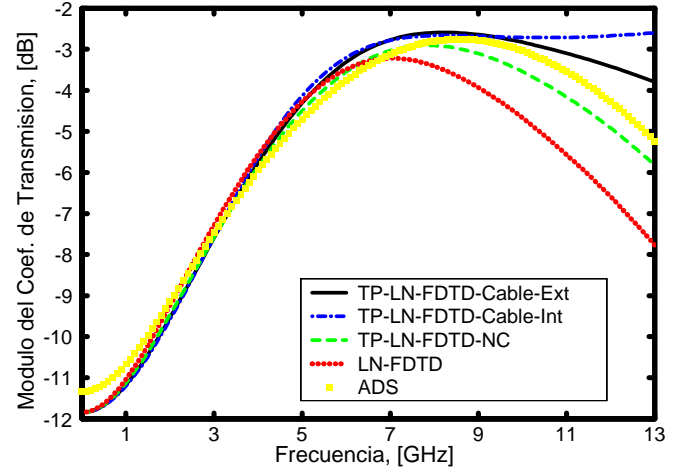


Fig. 6. Módulo del coeficiente de transmisión para la misma estructura que en la figura 5.

4-d) es la que da mejores resultados. Dichos resultados son también mejores que los obtenidos mediante el método LN-FDTD. A la hora de interpretar los resultados, debe tenerse en cuenta también que el posible efecto inductivo del cableado utilizado en FDTD no se ha tenido en cuenta en las simulaciones realizadas con ADS®.

#### IV. CONCLUSIÓN

Se ha realizado una extensión del método LN-FDTD que permite la incorporación de circuitos lineales concentrados de dos puertas en simuladores FDTD. Para ello, definimos la red de dos puertas mediante su matriz admitancia en el dominio de Laplace y empleamos técnicas propias del filtrado digital para obtener un sistema de ecuaciones en diferencias que describe su comportamiento en el dominio del tiempo discreto. Para validar el nuevo algoritmo, se han calculado los parámetros de *scattering* de un diodo, en régimen lineal, colocado en serie entre dos líneas *microstrip*. Los resultados se han comparado con los obtenidos mediante ADS® obteniéndose un buen acuerdo.

#### REFERENCES

- [1] W. Sui, D. A. Chistensen, and C. H. Durney, "Extending the two-dimensional FDTD method to hybrid electromagnetic systems with active and passive lumped elements," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, pp.724-730, Apr. 1992.
- [2] M. Piket-May, A. Taflové and J. Baron, "FD-TD Modeling of Digital Signal Propagation in 3-D Circuits with Passive and Active Loads," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 8, pp. 1514-1532, August 1994.
- [3] P. Ciampolini, P. Mezzanotte, L. Roselli and R. Sorrentino, "Accurate and efficient circuit simulation with lumped-element FDTD technique," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, pp. 2207-2215, Dec. 1996.
- [4] J. A. Pereda, F. Alimenti, P. Mezzanotte, L. Roselli and R. Sorrentino, "A New Algorithm for the Incorporation of Arbitrary Linear Lumped Networks into FDTD Simulators," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 6, pp. 943-949, June 1999.
- [5] A. Taflové and S. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 2 ed., Artech House, Boston, MA, 2000.